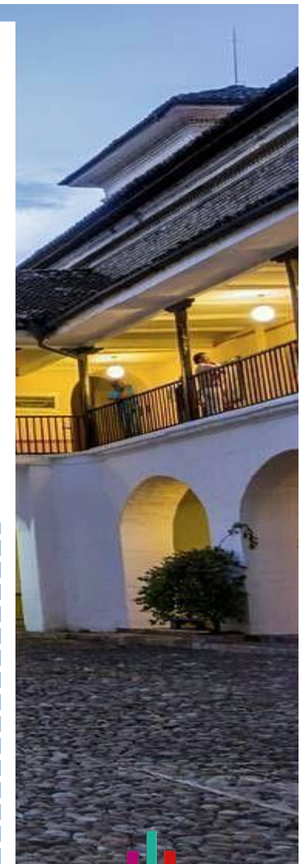

Ejercicios de cálculo

Taller de Repaso – 29/11/2022

Autor:
Ervin Andrade Hoyos
Docente ocasional tiempo completo

Resumen:

La estructura de estos ejercicios de permitirá disfrutar, practicar y asentar las bases de este campo de las Matemáticas, nivelando, aprendiendo y repasando temas del Algebra básicos e importantes para futuros estudios y aplicaciones.

Palabras clave:
Exponencial, Logaritmos, limites, derivadas, Marginalidad.

Descripción:

Los ejercicios calculo presentes en el documento desarrollan habilidades de estudio que ayudan a afianzar la comprensión del cálculo, practicando temas como funciones exponenciales y logarítmicas, limites, derivadas, marginalidad. así como su respectiva aplicación a la administración y economía.

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y DE LA ADMINISTRACIÓN
Tecnología Gestión Empresarial
Institución Universitaria Colegio Mayor del Cauca.

Auspiciador: Ingrese el nombre de los patrocinadores externos (si los tiene).

Referencie este documento así:

Andrade Autor, Inicial Ervin. (2022).Ejercicios de cálculo [Taller de repaso]. Institución Universitaria Colegio Mayor del Cauca.

Ejercicios de Calculo

1. Funciones exponenciales.

Construya las gráficas de cada función.

- $y = 2^x$
- $y = (\frac{1}{3})^x$
- $y = 3^x$
- $y = 5 + 2e^x$
- $y = 3^{-x}$
- $y = -3^x$

Determine el dominio y rango de las siguientes funciones.

- $y = f(x) = 2^{-x}$
- $y = f(t) = -2^t$
- $y = g(x) = 5 + 2e^x$
- $y = f(t) = 3 - 2e^{-t}$

Explicación y ejercicios complementarios.

Para recordar como graficar, dominio y rango de una función exponencial se recomienda observar los siguientes video tutoriales que es creative commons (reutilización permitida).

Función exponencial – Aplicaciones.

- (Crecimiento de ganancias) Las ganancias de cierta compañía han ido aumentando en 12% anual en promedio entre 1975 y 1980. En 1980, fueron \$5.2 millones. Suponiendo que esta tasa de crecimiento continúe, encuentre las ganancias en 1985.

- (Crecimiento poblacional) La población de cierta nación en desarrollo se determinó que está dada por medio de la fórmula

$$p = 15e^{0.02t}$$

donde t es el número de años medidos a partir de 1960. Determine la población en 1980 y la población proyectada en 2000, suponiendo que esta fórmula continúa cumpliéndose hasta entonces.

- Una población de microorganismos se duplica cada 20 minutos. Si al principio están presentes 200 organismos, encuentre una fórmula para el tamaño de la población después de t horas.

- Depreciación exponencial) Una máquina se compra en $10,000 y se deprecia de manera continua desde la fecha de compra. Su valor después de t años está dado por la fórmula

$$V = 10{,}000e^{-0.2t}$$

  a) Determine el valor de la máquina después de 8 años.
  b) Determine la disminución porcentual del valor cada año.

- (Análisis de equilibrio) Por medio de un examen a sus competidores, una compañía manufacturera concluye que el número N de sus empleados aumenta exponencialmente con su volumen de ventas semanales x de acuerdo con la fórmula $N = 100e^{0.02x}$. El costo promedio del salario es $6 por hora con una semana laborable de 35 horas. El producto de la empresa se vende en $2000 cada uno. Dibuje graficas del pago semanal y de los ingresos semanales como funciones de x para 10 < x < 130, y estime gráficamente el intervalo de valores de x en el que la compañía puede obtener ganancias.

Explicación y ejercicios complementarios.

Para recordar cómo aplicar la función exponencial a problemas del mundo real se recomienda observar los siguientes video tutoriales que es creative commons (reutilización permitida).

2. Funciones logarítmicas
   Logaritmos

Calcule los valores de las siguientes expresiones usando la definición de logaritmo.

- $\log_2 512$
- $\log_2 0.125$
- $\log_{27} 243$
- $\log_a 32 \div \log_a 4$
- $10^{\log 2}$
- $\log_4(2p)$

Determine el dominio de las siguientes funciones

- $f(x) = \ln(x-2)$
- $f(x) = \ln(4-x^2)$
- $f(x) = \ln(3-x)$
- $f(x) = \ln(9+x^2)$
- $f(x) = 1 + \ln x$
- $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$
- $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+\ln x}$

Utilizando la gráfica de $\boldsymbol{y = \ln x}$, haga un bosquejo de las gráficas de las siguientes funciones.

- $f(x) = \ln(-x)$
- $f(x) = 1 + \ln x$
- $f(x) = 2\ln x$
- $f(x) = \ln(x-3)$
- $f(x) = \ln x^2$

Explicación y ejercicios complementarios.

Para recordar como graficar, dominio y rango de una función logarítmica se recomienda observar los siguientes video tutoriales que es creative commons (reutilización permitida).

Aplicaciones

- (Función de costo) Una compañía manufacturera encuentra que el costo de producir x unidades por hora está dado por la fórmula
$$C(x) = 5 + 10\log(1 + 2x)$$
Calcule:
a) El costo de producir 5 unidades por hora.
b) El costo extra por aumentar la tasa de producción de 5 a 10 unidades por hora.
c) El costo extra por aumentar de 10 a 15 unidades por hora.

- (Publicidad y ventas) Una compañía encuentra que la cantidad de dólares y que debe gastar semanalmente en publicidad para vender x unidades de su producto está dada por
$$y = 200\ln\left(\frac{400}{500 - x}\right)$$
Calcule el gasto publicitario que se necesita para vender:
a) 100 unidades
b) 300 unidades
c) 490 unidades

- (Función de costo) una compañía está ampliando sus instalaciones y tiene opción para elegir entre dos modelos.
Las funciones de costos son $\boldsymbol{C_1(x) = 3.5 + \log(2x + 1)}$ y $\boldsymbol{C_2(x) = 2 + \log(60x + 105)}$ donde x es la tasa de producción. Encuentre la tasa x a la cual los dos modelos tienen los mismos costos. ¿Para valores grandes de x, cuál modelo es más barato?

- (Inversiones) La suma de $100 se invierte a un interés compuesto anual del 6%. ¿Cuánto tardará la inversión en incrementar su valor a $150?

Explicación y ejercicios complementarios.

Para recordar cómo aplicar la función logarítmica y los logaritmos en general a problemas se recomienda observar los siguientes video tutoriales que es creative commons (reutilización permitida).

3. Limites

   Evalué los siguientes límites.

- $\lim_{x\to 2} (3x^2 + 7x - 1)$
- $\lim_{x\to -1} (2x^2 + 3x + 1)$
- $\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x-2}$
- $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+1}{x+3}$
- $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{\sqrt{x^2+11}}$
- $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$
- $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x^2+3x+2}$
- $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$
- $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3}$
- $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$
- $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$
- $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$
- $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$
- $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$
- $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$
- $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$
- $\lim_{x\to 9} \frac{9-x}{\sqrt{x}-3}$
- $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x^2-81}$
- $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$
- $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$

- $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^3-64}$
- $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^3-729}{\sqrt{x}-3}$
- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x-2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2+5x+7}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+2x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{4+x}-2}$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2-x}-1}{2-\sqrt{x+3}}$

Explicación y ejercicios complementarios.

Para recordar calcular limites y limites algebraicos se recomienda observar los siguientes video tutoriales que es creative commons (reutilización permitida).

Limites laterales y continuidad de funciones

Considerando una función por tramos, verificar si existen los siguientes limites (Graficar).

- $$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ; \quad x<2 \\ \sqrt{x+34} & ; \quad x>2 \end{cases}$$

- $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, & x \leq 1 \\ x + 4, & x > 1 \end{cases}$$
- $$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 6x - x^2 & si\ x < 2 \\ 2x^2 - x - 3 & si\ x > 2 \\ 6 & si = 2 \end{cases}}$$

Determinar el valor de a y b, para que la función sea continua.

- $$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2 & si\ x \leq -1 \\ 3ax + 3b & si - 1 \leq x \leq 2 \\ 6x + 7 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$
- $$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x - 2 & si\ x \leq 1 \\ 2ax - 14b & si\ 1 < x \leq 3 \\ -ax + 10b & si\ x > 3 \end{cases}$$

4. Derivadas

   Derivar utilizando la definición de derivada

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- $f(x) = 3x$
- $f(x) = 4x + 2$
- $f(x) = x^2 + 1$

Calcule las derivadas de las siguientes funciones con respecto a las variables independientes según sea el caso.

- $f(x) = 2x - 5$
- $f(x) = 2 - 5x$
- $g(x) = 7$
- $g(t) = -3$
- $f(x) = x^2$
- $g(t) = 3t^2 + 1$
- $f(u) = u^2 + u + 1$
- $g(x) = x^2 - 3x + 7$
- $h(x) = 7 - 3x^2$
- $f(x) = 1/x$
- $g(x) = \dfrac{1}{x + 1}$
- $h(u) = \dfrac{2}{1 - u}$
- $f(t) = \dfrac{1}{2t + 3}$
- $g(u) = \dfrac{u}{u + 1}$

Derive las siguientes expresiones.

- x^5
- x^3
- $\dfrac{1}{t^3}$
- $\dfrac{4}{u^4}$
- $\dfrac{1}{5u^5}$
- $\dfrac{x^7}{7}$
- $4x^3 - 3x^2 + 7$
- $2x - x^3$
- $3x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 8$
- $5 - 2x^2 + x^4$
- $\dfrac{2y^2 + 3y - 7}{y}$
- $\dfrac{(x + 1)^2}{x}$
- $\dfrac{(x + 1)^2 + (x - 1)^2}{x^2}$
- $\dfrac{x^6}{6} + \dfrac{6}{x^6}$
- $(x + 2)^3$
- $\left(\dfrac{x + 1}{x}\right)^3$

Explicación y ejercicios complementarios.

Para derivar funciones se recomienda observar los siguientes video tutoriales que es creative commons (reutilización permitida).

Análisis marginal

Calcule el costo marginal de las siguientes funciones de costo.

- $C(x) = 100 + 2x$
- $C(x) = 40 + (\ln 2)x^2$
- $C(x) = 0.0001x^3 - 0.09x^2 + 20x + 1200$
- $C(x) = 10^{-6}x^3 - (3 \times 10^{-3})x^2 + 36x + 2000$

Calcule el ingreso marginal de las siguientes funciones de ingreso.

- $R(x) = x - 0.01x^2$
- $R(x) = 5x - 0.01x^{5/2}$
- $R(x) = 0.1x - 10^{-3}x^2 - 10^{-5}x^{5/2}$
- $R(x) = 100x - (\log 5)x^3(1 + \sqrt{x})$

Aplicaciones

- (Ingreso marginal) Si la ecuación de demanda es x + 4p = 100, calcule el ingreso marginal, **R'(x)**
- (Ingreso marginal) Si la ecuación de demanda es $\mathbf{10p + x + 0.01x^2 = 700}$, calcule el ingreso marginal cuando p = 10
- (Utilidad marginal) Si la ecuación de demanda es $\mathbf{x + 4p = 100}$, y la función de costo es $\mathbf{C(x) = 100 + 5x}$, calcule la utilidad marginal.

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
COLEGIO MAYOR DEL CAUCA

- (Costo marginal) Para el caso de la función de costo

$$\boldsymbol{C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000}$$

determine el costo marginal como una función de x. Evalúe el costo marginal cuando la producción está dada por x = 50, x = 100 y x = 150.

- Un Productor estima que cuando se fabrican x número de artículos, el costo total en miles de pesos está dado por

$$C(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0.2x^2 + 4x + 190}$$

Y que el precio por unidad, en miles de pesos, depende del número de unidades producidas y está dado por la función p = 0.5(100 − x).

a. Calcular la función de utilidad.
b. Determinar la función de utilidad marginal.
c. Calcular la utilidad de producir y vender la novena unidad.

- El ingreso total mensual de un pequeño industrial está representado por $\boldsymbol{I}\ (\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{3400x - 0}$, $5x^2$ pesos, cuando produce y vende x unidades mensuales. Actualmente el industrial produce 200 unidades al mes y planea incrementar la producción mensual en 1 unidad.
Utilicemos la función de ingreso marginal para estimar el ingreso que generará la producción y venta de la unidad 201.

- (Utilidad marginal) La ecuación de demanda de cierto artículo es

$$p + 0.1x = 80$$

y la función de costo es

$$C(x) = 5000 + 20x$$

Calcule la utilidad marginal cuando se producen y venden 150 unidades y también en el caso de que se produzcan y vendan 400 unidades.

- (Utilidades marginales) El editor de una revista descubre que si fija un precio de \$1 a su revista, vende 20,000 ejemplares al mes; sin embargo, si el precio fijado es de \$1.50, sus ventas sólo serán por 15,000 ejemplares. El costo de producir cada ejemplar es de \$0.80 y tiene costos fijos de

$10,000 al mes. Suponiendo una ecuación de demanda lineal, calcule su función de utilidad marginal y determine el precio de la revista que haga la utilidad marginal igual a cero. Evalúe la utilidad misma cuando el precio es:

a. $1.80
b. $1.90
c. $2

Explicación y ejercicios complementarios.

Para aplicar la derivada al análisis marginal se recomienda observar los siguientes video tutoriales que es creative commons (reutilización permitida).

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
COLEGIO MAYOR DEL CAUCA

Bibliografía

Angel, A. R. (2000). *Algebra Intermedia.* Mexico: Prentice-Hall.

Arya, J. C., & Lardner, R. W. (2009). *Matemáticas aplicadas a la Adminisytración y a la Economía.* Mexico: Pearson Educación.

Harshbarger, R. J., & Reynolds, J. J. (2005). *Matemáticas Aplicadas a la Administración, economía y ciencias sociales.* Mexico: McGraw-Hill Interamericana.

Leithold, L. (1988). *El Cálcuo.* Mexico: Oxford University.